ЯКОВ ПЕРЕЛЬМАН

НАУКА ДЛЯ ТЕХ, КТО ВСЕ ЗАБЫЛ И ТЕХ, КТО ЕЩЕ НЕ ПРОХОДИЛ

ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

БОМБОРА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва 2023

УДК 51
ББК 22.1
П27

Перельман, Яков Исидорович.

П27 Живая математика / Яков Перельман. — Москва : Эксмо, 2023. — 192 с. : ил. — (Перельмания. Классика нашей науки).

ISBN 978-5-04-167998-9

«Живая математика» — сборник увлекательных математических задач с объяснениями от признанного российского популяризатора науки Якова Перельмана. Эта книга вовсе не требует от читателя расширенного знания математики, для ее понимания достаточно уметь совершать базовые вычисления. Такой подход при знакомстве с царицей наук понравится не только детям, но и их родителям.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-04-167998-9

—

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Для чтения этой книги достаточна весьма скромная математическая подготовка: знание правил арифметики и элементарные сведения из геометрии. Лишь незначительная часть задач требует умения составлять и решать простейшие уравнения. Тем не менее содержание книги весьма разнообразно: от пестрого подбора головоломок и замысловатых трюков математической гимнастики до полезных практических приемов счета и измерения. Составитель заботился о свежести включаемого материала и избегал повторения того, что входит в другие сборники того же автора.

Я. И. Перельман

ГЛАВА ПЕРВАЯ

—

ЗАВТРАК С ГОЛОВОЛОМКАМИ

1. БЕЛКА НА ПОЛЯНЕ

— Сегодня утром я с белкой в прятки играл, — рассказывал во время завтрака один из собравшихся за столом дома отдыха. — Вы знаете в нашем лесу круглую полянку с одинокой березой посередине? За этим деревом и пряталась от меня белка. Выйдя из чащи на полянку, я сразу заметил беличью мордочку с живыми глазками, уставившуюся на меня из-за ствола. Осторожно, не приближаясь, стал я обходить по краю полянки, чтобы взглянуть на зверька. Раза четыре обошел я дерево, но плутовка отступала по стволу в обратную сторону, по-прежнему показывая только мордочку. Так и не удалось мне обойти кругом белки.

— Однако, — возразил кто-то, — сами же вы говорите, что четыре раза обошли вокруг дерева.

— Вокруг дерева, но не вокруг белки!

— Но белка-то на дереве?

— Что же из того?

— То, что вы кружились и около белки.

— Хорошо кружился, если ни разу не видел ее спинки!

— При чем тут спинка? Белка в центре, вы ходите по кругу, значит, ходите кругом белки.

— Ничуть не значит. Вообразите, что я хожу около вас по кругу, а вы поворачиваетесь ко мне все время лицом, пряча спину. Скажете вы разве, что я кружусь около вас?

— Конечно, скажу. Как же иначе?

— Кружусь, хотя не бываю позади вас, не вижу вашей спины?

— Далась вам спина! Вы замыкаете вокруг меня путь — вот в чем суть дела, а не в том, чтобы видеть спину!

— Позвольте, что значит кружиться около чего-нибудь? По-моему, это означает только одно: становиться последовательно в такие места, чтобы видеть предмет со всех сторон. Ведь правильно, профессор? — обратился спорящий к сидевшему за столом старику.

— Спор идет у вас, в сущности, о словах, — ответил ученый. — А в таких случаях надо начинать всегда с того, о чем вы сейчас завели речь: надо договориться о значении слов.

Рис. Белка на поляне

Как понимать слова «двигаться вокруг предмета»? Смысл их может быть двоякий. Можно, во-первых, разуметь под ними перемещение по замкнутой линии, внутри которой находится предмет. Это одно понимание. Другое: двигаться по отношению к предмету так, чтобы видеть его со всех сторон. Держась первого понимания, вы должны признать, что четыре раза обошли вокруг белки. Придерживаясь же второго, обязаны заключить, что не обошли вокруг нее ни разу. Поводов для спора здесь, как видите, нет, если обе стороны говорят на одном языке, понимают слова одинаково.

— Прекрасно, можно допустить двоякое понимание. Но какое все же правильнее?

— Так ставить вопрос не приходится. Условливаться можно о чем угодно. Уместно только спросить, что более согласно с общепринятым пониманием. Я сказал бы, что лучше вяжется с духом языка первое понимание, и вот почему. Солнце, как известно, делает полный оборот вокруг своей оси в 26 суток...

— Солнце вертится?

— Конечно, как и Земля, вокруг оси. Вообразите, однако, что вращение Солнца совершается медленнее, а именно что оно делает один оборот не в 26 суток, а в 365 суток, то есть в год. Тогда Солнце было бы обращено к Земле всегда одной и той же своей стороной; противоположной половины, «спины» Солнца, мы никогда не видели бы. Но разве стал бы кто-нибудь утверждать из-за этого, что Земля не кружится около Солнца?

— Да, теперь ясно, что я все-таки кружился около белки.

— Есть предложение, товарищи! Не расходиться, — сказал один из слушавших спор. — Так как в дождь гулять никто не пойдет, а перестанет дождик, видно, не скоро, то давайте проведем здесь время за головоломками. Начало сделано. Пусть каждый по очереди придумает или припомнит какую-нибудь головоломку. Вы же, профессор, явитесь нашим верховным судьей.

— Если головоломки будут с алгеброй или с геометрией, то я должна отказаться, — заявила молодая женщина.

— И я тоже, — присоединился кто-то.

— Нет, нет, участвовать должны все! А мы попросим присутствующих не привлекать ни алгебры, ни геометрии, разве только самые начатки. Возражений не имеется?

— Тогда я согласна и готова первая предложить головоломку.

— Прекрасно, просим! — донеслось с разных сторон. — Начинайте.

2. В КОММУНАЛЬНОЙ КУХНЕ

— Головоломка моя зародилась в обстановке коммунальной квартиры. Задача, так сказать, бытовая. Жилица — назову ее для удобства Тройкиной — положила в общую плиту 3 полена своих дров, жилица Пятеркина — 5 поленьев. Жилец Бестопливный, у которого, как вы догадываетесь, не было своих дров, получил от обеих гражданок разрешение сварить обед на общем огне.

В возмещение расходов он уплатил соседкам 80 копеек. Как должны они поделить между собой эту плату?

— Пополам, — поспешил заявить кто-то. — Бестопливный пользовался их огнем в равной мере.

— Ну нет, — возразил другой, — надо принять в соображение, как участвовали в этом огне дровяные вложения гражданок. Кто дал 3 полена, должен получить 30 копеек; кто дал 5 поленьев, получает 50 копеек. Вот это будет справедливый дележ.

Рис. Завтрак с головоломками

— Товарищи, — взял слово тот, кто затеял игру и считался теперь председателем собрания. — Окончательные решения головоломок давайте пока не объявлять. Пусть каждый еще подумает над ними. Правильные ответы судья огласит нам за ужином. Теперь следующий. Очередь за вами, товарищ пионер!

3. РАБОТА ШКОЛЬНЫХ КРУЖКОВ

— В нашей школе, — начал пионер, — имеется 5 кружков: политкружок, военный, фотографический, шахматный и хоровой. Политкружок занимается через день, военный — через 2 дня на 3-й; фотографический — каждый 4-й день, шахматный — каждый 5-й день и хоровой — каждый 6-й день. Первого января собрались в школе все 5 кружков, а затем занятия велись в назначенные по плану дни, без отступлений от расписания. Вопрос состоит в том, сколько в первом квартале было еще вечеров, когда собирались в школе все 5 кружков.

— А год был простой или високосный? — осведомились у пионера.

— Простой.

— Значит, первый квартал, — январь, февраль, март, — надо считать за 90 дней?

— Очевидно.

— Позвольте к вопросу вашей головоломки присоединить еще один, — сказал профессор. — А именно сколько в том же квартале года было таких вечеров, когда кружковых занятий в школе вовсе не происходило?

— Ага, понимаю! — раздался возглас. — Задача с подвохом. Ни одного дня не будет больше с 5 кружками и ни одного дня без всяких кружков. Это уже ясно!

— Почему? — спросил председатель.

— Объяснить не могу, но чувствую, что отгадчика хотят поймать врасплох.

— Ну, это не довод. Вечером выяснится, правильно ли ваше предчувствие. За вами очередь, товарищ!

4. КТО БОЛЬШЕ?

— Двое считали в течение часа всех, кто проходил мимо них по тротуару. Один стоял у ворот дома, другой прохаживался взад и вперед по тротуару. Кто насчитал больше прохожих?

— Идя, больше насчитаешь, ясное дело, — донеслось с другого конца стола.

— Ответ узнаем за ужином, — объявил председатель. — Следующий!

5. ДЕД И ВНУК

— То, о чем я скажу, происходило в 1932 году. Мне было тогда ровно столько лет, сколько выражают последние две цифры года моего рождения. Когда я об этом соотношении рассказал деду, он удивил меня заявлением, что с его возрастом выходит то же самое. Мне это показалось невозможным...

— Разумеется, невозможно, — вставил чей-то голос.

— Представьте, вполне возможно! Дед доказал мне это. Сколько же было лет каждому из нас?

Рис. Дед и внук

6. ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЕ БИЛЕТЫ

— Я — железнодорожная кассирша, продаю билеты, — начала следующая участница игры. — Многим это кажется очень простым делом. Не подозревают, с каким большим числом билетов приходится иметь дело кассиру даже маленькой станции. Ведь необходимо, чтобы пассажиры могли получить билеты от данной станции до любой другой на той же дороге, притом в обоих направлениях. Я служу на дороге с 25 станциями. Сколько же различных образцов билетов заготовлено железной дорогой для всех ее касс?

— Ваша очередь, товарищ летчик, — провозгласил председатель.

7. ПОЛЕТ ДИРИЖАБЛЯ

— Из Ленинграда вылетел прямо на север дирижабль. Пролетев в северном направлении 500 километров, он повернул на восток. Пролетев в эту сторону 500 километров, дирижабль сделал новый поворот — на юг и прошел в южном направлении 500 километров. Затем он повернул на запад и, пролетев 500 километров, опустился на землю. Спрашивается: где расположено место спуска дирижабля относительно Ленинграда — к западу, к востоку, к северу или к югу?

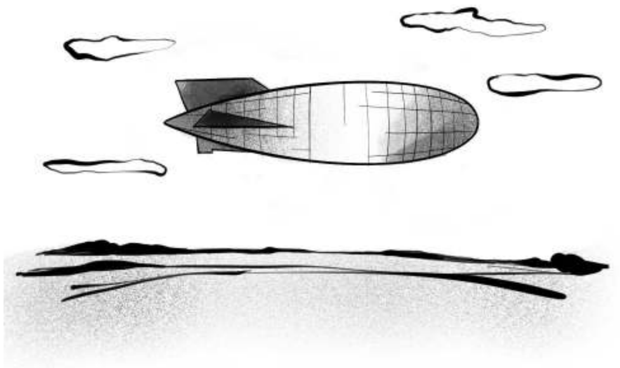

Рис. Полет дирижабля

— На простака рассчитываете, — сказал кто-то, — 500 шагов вперед, 500 вправо, 500 назад да 500 влево, куда придем? Откуда вышли, туда и придем!

— Итак, где, по-вашему, спустился дирижабль?

— На том же ленинградском аэродроме, откуда поднялся. Не так разве?

— Именно не так.

— В таком случае я ничего не понимаю!

— В самом деле, здесь что-то неладно, — вступил в разговор сосед. — Разве дирижабль спустился не в Ленинграде? Нельзя ли повторить задачу?

Летчик охотно исполнил просьбу. Его внимательно выслушали и с недоумением переглянулись.

— Ладно, — объявил председатель. — До ужина успеем подумать об этой задаче, а сейчас будем продолжать.

8. ТЕНЬ

— Позвольте мне, — сказал очередной загадчик, — взять сюжетом головоломки тот же дирижабль. Что длиннее: дирижабль или его полная тень?

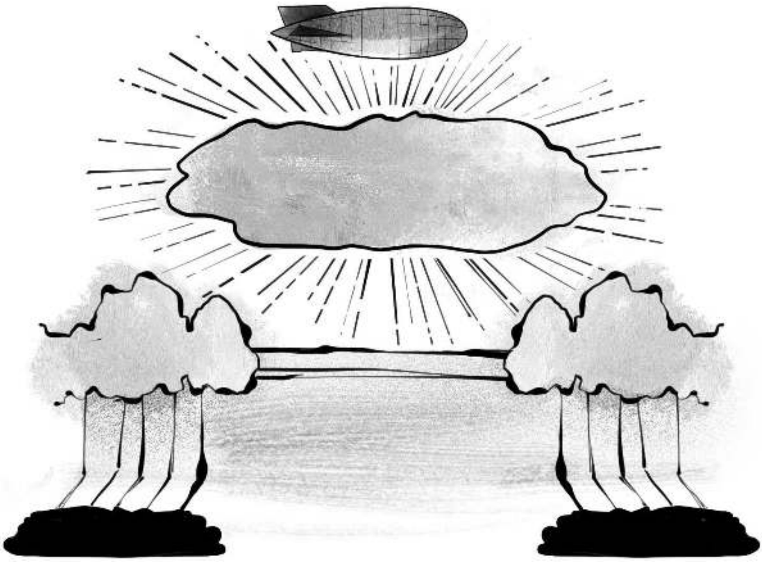

Рис. Тень

— В этом и вся головоломка?

— Вся.

— Тень, конечно, длиннее дирижабля: ведь лучи солнца расходятся веером, — последовало сразу решение.

— Я бы сказал, — возразил кто-то, — что, напротив, лучи солнца параллельны; тень и дирижабль одной длины.

— Что вы? Разве не случалось вам видеть расходящиеся лучи от спрятавшегося за облаком солнца? Тогда можно воочию убедиться, как сильно расходятся солнечные лучи. Тень дирижабля должна быть значительно больше самого дирижабля, как тень облака больше самого облака.

— Почему же обычно принимают, что лучи солнца параллельны? Моряки, астрономы — все так считают... Председатель не дал спору разгореться и предоставил слово следующему загадчику.

9. ЗАДАЧА СО СПИЧКАМИ

Очередной оратор высыпал на стол все спички из коробка и стал распределять их в три кучки.

— Костер собираетесь раскладывать? — шутили слушатели.

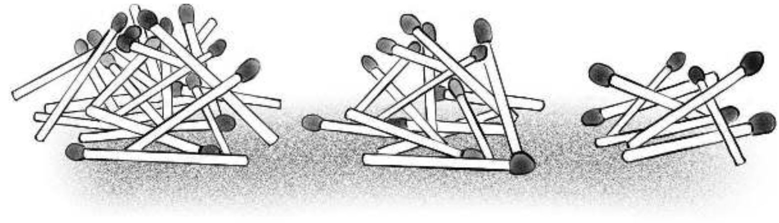

Рис. Задача со спичками

— Головоломка, — объяснил загадчик, — будет со спичками. Вот их три неравные кучки. Во всех вместе 48 штук. Сколько в каждой, я вам не сообщаю. Зато отметьте следующее: если из первой кучки я переложу во вторую столько спичек, сколько в этой второй кучке имелось; затем из второй в третью переложу столько, сколько в этой третьей перед тем будет находиться; и, наконец, из третьей переложу в первую столько спичек, сколько в этой первой кучке будет тогда иметься, — если, говорю, все это проделать, то число спичек во всех кучках станет одинаково. Сколько же было в каждой кучке первоначально?

10. КОВАРНЫЙ ПЕНЬ

— Головоломка эта, — начал сосед последнего загадчика, — напоминает задачу, которую давно как-то задал мне деревенский математик. Это был целый рассказ, довольно забавный. Повстречал крестьянин в лесу незнакомого старика. Разговорились. Старик внимательно оглядел крестьянина и сказал:

— Известен мне в леску этом пенечек один удивительный. Очень в нужде помогает.

— Как помогает? Вылечивает?

— Лечить не лечит, а деньги удваивает. Положишь под него кошель с деньгами, досчитаешь до ста — и готово: деньги, какие были в кошельке, удвоились. Такое свойство имеет. Замечательный пень!

— Вот бы мне испробовать, — мечтательно сказал крестьянин.

— Это можно. Отчего же? Заплатить только надо.

— Кому платить? И много ли?

— Тому платить, кто дорогу укажет. Мне, значит. А много ли, о том особый разговор.

Стали торговаться. Узнав, что у крестьянина в кошельке денег мало, старик согласился получить после каждого удвоения по 1 руб. 20 коп. На том и порешили. Старик повел крестьянина в глубь леса, долго бродил с ним и наконец разыскал в кустах старый, покрытый мхом еловый пень. Взяв из рук крестьянина кошелек, он засунул его между корнями пня. Досчитали до ста. Старик снова стал шарить и возиться у основания пня, наконец извлек оттуда кошелек и подал крестьянину.

Заглянул крестьянин в кошелек, и что же? Деньги в самом деле удвоились! Отсчитал из них старику обещанные 1 руб. 20 коп. и попросил засунуть кошелек вторично под чудодейственный пень.

Снова досчитали до ста, снова старик стал возиться в кустах у пня, и снова совершилось диво: деньги в кошельке удвоились. Старик вторично получил из кошелька обусловленные 1 руб. 20 коп.

В третий раз спрятали кошель под пень. Деньги удвоились и на этот раз. Но когда крестьянин уплатил старику обещанное вознаграждение, в кошельке не осталось больше ни одной копейки.

Бедняга потерял на этой комбинации все свои деньги. Удваивать больше было уже нечего, и крестьянин уныло побрел из лесу.

Секрет волшебного удвоения денег вам, конечно, ясен — старик недаром, отыскивая кошелек, мешкал в зарослях у пня. Но можете ли вы ответить на другой вопрос: сколько было у крестьянина денег до злополучных опытов с коварным пнем?

11. ЗАДАЧА О ДЕКАБРЕ

— Я, товарищи, языковед, от всякой математики далек, — начал пожилой человек, которому пришел черед задавать головоломку. — Не ждите от меня поэтому математической задачи. Могу только предложить вопрос из знакомой мне области. Разрешите задать календарную головоломку?

— Просим!

— Двенадцатый месяц называется у нас «декабрь». А вы знаете, что, собственно, значит «декабрь»? Слово это происходит от греческого слова «дека» — десять, отсюда также слова «декалитр» — десять литров, «декада» — десять дней и т. д. Выходит, что месяц декабрь носит название «десятый». Чем объяснить такое несоответствие?

— Ну, теперь осталась только одна головоломка, — произнес председатель.

12. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ФОКУС

— Мне приходится выступать последним, двенадцатым. Для разнообразия покажу вам арифметический фокус и попрошу раскрыть его секрет. Пусть кто-нибудь, хотя бы вы, товарищ председатель, напишет, тайно от меня, любое трехзначное число.

— Могут быть и нули в этом числе?

— Не ставлю никаких ограничений. Любое трехзначное число, какое пожелаете.

— Написал. Что теперь?

— Припишите к нему это же число еще раз. У вас получится, конечно, шестизначное число.

— Есть. Шестизначное число.

— Передайте бумажку соседу, что сидит подальше от меня. А он пусть разделит это шестизначное число на 7.

— Легко сказать: разделить на семь! Может, и не разделится.

— Не беспокойтесь, поделится без остатка.

— Числа не знаете, а уверены, что поделится.

— Сначала разделите, потом будем говорить.

— На ваше счастье — разделилось.

— Результат вручите своему соседу, не сообщая мне. Он разделит его на 11.

— Думаете, опять повезет — разделится?

— Делите, остатка не получится.

— В самом деле, без остатка! Теперь что?

— Передайте результат дальше. Разделим его... ну, скажем, на 13.

— Нехорошо выбрали. Без остатка на 13 мало чисел делится... ан нет, разделилось нацело. Везет же вам!

— Дайте мне бумажку с результатом; только сложите ее, чтобы я не видел числа.

Не развертывая листка бумаги, «фокусник» вручил его председателю.

— Извольте получить задуманное вами число. Правильно?

— Совершенно верно! — с удивлением ответил тот, взглянув на бумажку. — Именно это я и задумал... А теперь, так как список ораторов исчерпан, позвольте закрыть наше собрание, благо и дождь успел пройти. Разгадки всех головоломок будут оглашены сегодня же, после ужина. Записки с решениями можете подавать мне.

РАЗВЯЗКА ЗАВТРАКА

—

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК 1–12

1. Головоломка с белкой на поляне рассмотрена была полностью раньше. Переходим к следующей.

2. Нельзя считать, как многие делают, что 80 коп. уплачено за 8 поленьев, по гривеннику за полено. Деньги эти уплачены только за третью часть от 8 поленьев, потому что огнем пользовались трое в одинаковой мере. Отсюда следует, что все 8 поленьев оценены были в 80 × 3, т. е. в 2 руб. 40 коп., и цена одного полена — 30 коп.

Теперь легко сообразить, сколько причитается каждому. Пятеркиной за ее 5 поленьев следует 150 коп.; но она сама воспользовалась плитой на 80 коп.; значит, ей остается дополучить еще 150 – 80, т. е. 70 коп. Тройкина за 3 своих полена должна получить 90 коп.; а если вычесть 80 коп., причитающиеся с нее за пользование плитой, то следовать ей будет всего только 90 – 80, т. е. 10 коп.

Итак, при правильном дележе Пятеркина должна получить 70 коп., Тройкина — 10 коп.

3. На первый вопрос — через сколько дней в школе соберутся одновременно все 5 кружков — мы легко ответим, если сумеем разыскать наименьшее из всех чисел, которое делится без остатка на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6. Нетрудно сообразить, что число это 60. Значит, на 61-й день соберется снова 5 кружков: политический — через 30 двухдневных промежутков, военный — через 20 трехдневных, фотокружок — через 15 четырехдневных, шахматный — через 12 пятидневок и хоровой — через 10 шестидневок. Раньше, чем через 60 дней, такого вечера не будет. Следующий подобный же вечер будет еще через 60 дней, т. е. уже во втором квартале.

Итак, в течение первого квартала окажется только один вечер, когда в клубе снова соберутся для занятий все 5 кружков.

Труднее найти ответ на второй вопрос задачи: сколько будет вечеров, свободных от кружковых занятий? Чтобы разыскать такие дни, надо выписать по порядку все числа от 1 до 90 и зачеркнуть в этом ряду дни работы политкружка, т. е. числа 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Потом зачеркнуть дни работы военного кружка: 4-й, 10-й и т. д. После того как зачеркнем затем дни занятий фотокружка, шахматного и хорового, у нас останутся незачеркнутыми те дни первого квартала, когда ни один кружок не работал.

Кто проделает эту работу, тот убедится, что вечеров, свободных от занятий, в течение первого квартала будет довольно много: 24. В январе их 8, а именно 2, 8, 12 ,14, 18, 20, 24 и 30-го. В феврале насчитывается 7 таких дней, в марте — 9.

4. Оба насчитали одинаковое число прохожих. Хотя тот, кто стоял у ворот, считал проходивших в обе стороны, зато тот, кто ходил, видел вдвое больше встречных людей.

5. С первого взгляда может действительно показаться, что задача неправильно составлена: выходит как будто, что внук и дед одного возраста. Однако требование задачи, как сейчас увидим, легко удовлетворяется.

Внук, очевидно, родился в XX столетии. Первые две цифры года его рождения, следовательно, 19: таково число сотен. Число, выражаемое остальными цифрами, будучи сложено с самим

Рис. Решения головоломок

собою, должно составить 32. Значит, это число 16: год рождения внука 1916-й, и ему в 1932 г. было 16 лет.

Дед его родился, конечно, в XIX столетии: первые две цифры года его рождения 18. Удвоенное число, выражаемое остальными цифрами, должно составить 132. Значит, само это число равно половине от 132, т. е. 66. Дед родился в 1866 г., и ему теперь 66 лет.

Таким образом, и внуку, и деду в 1932 г. столько лет, сколько выражают последние два числа годов их рождения.

6. На каждой из 25 станций пассажиры могут требовать билет до любой станции, т. е. на 24 пункта. Значит, разных билетов надо напечатать 25 × 24 = 600 образцов.

7. Задача эта никакого противоречия не содержит. Не следует думать, что дирижабль летел по контуру квадрата: надо принять в расчет шарообразную форму Земли. Дело в том, что меридианы к северу сближаются (см. рис.); поэтому, пройдя 500 км по параллельному кругу, расположенному на 500 км севернее широты Ленинграда, дирижабль отошел к востоку на большее число градусов, чем пролетел потом в обратном направлении, очутившись снова на широте Ленинграда. В результате дирижабль, закончив полет, оказался восточнее Ленинграда.

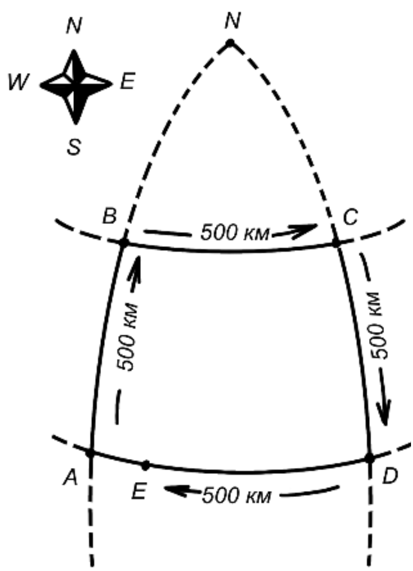

Рис. Решения_7

На сколько именно? Это можно рассчитать. На рисунке вы видите маршрут дирижабля: *ABCDE*. Точка N — северный полюс; в этой точке сходятся меридианы *AB* и *DC*. Дирижабль пролетел сначала 500 км на север, т. е. по меридиану AN. Так как длина градуса меридиана 111 км, то дуга меридиана в 500 км содержит 500 : 111 = 4,5°. Ленинград лежит на 60-й параллели; значит, точка *B* находится на 60° + 4,5° = 64,5°. Затем дирижабль летел к востоку, т. е. по параллели BC, и прошел по ней 500 км.

Длину одного градуса на этой параллели можно вычислить (или узнать из таблиц); она равна 48 км. Отсюда легко определить, сколько градусов пролетел дирижабль на восток: 500 : 48 = 10,4°. Далее воздушный корабль летел в южном направлении, т. е. по меридиану CD, и, пройдя 500 км, должен был очутиться снова на параллели Ленинграда. Теперь путь лежит на запад, т. е. по DA; 500 км этого пути явно короче расстояния AD. В расстоянии AD заключается столько же градусов, сколько и в BC, т. е. 10,4°. Но длина 1° на широте 60° равна 55,5 км. Следовательно, между A и D расстояние равно 55,5 × 10,4 = 577,2 км. Мы видим, что дирижабль не мог спуститься в Ленинграде; он не долетел до него 77 км, т. е. спустился на Ладожском озере.

8. Беседовавшие об этой задаче допустили ряд ошибок. Неверно, что лучи солнца, падающие на земной шар, заметно расходятся. *Земля* так мала по сравнению с расстоянием ее от солнца, что солнечные лучи, падающие на какую-либо часть ее поверхности, расходятся на неуловимо малый угол: практически лучи эти можно считать параллельными. То, что мы видим иногда при так называемом иззаоблачном сиянии, — не более как следствие перспективы. В перспективе параллельные линии представляются сходящимися; вспомните вид уходящих вдаль рельсов или вид длинной аллеи. Однако из того, что лучи солнца падают на землю параллельным пучком, вовсе не следует, что полная тень дирижабля равна по длине самому дирижаблю. Взглянув на рисунок, вы поймете, что полная тень дирижабля в пространстве сужается по направлению к земле и что, следовательно, тень, отбрасываемая им на земную поверхность, должна быть короче самого дирижабля: CD меньше, чем AB.

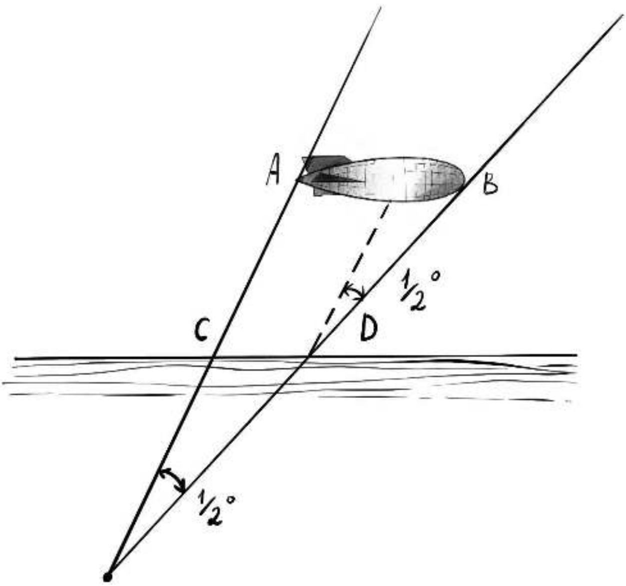

Рис. Решения головоломок. Дирижабль

Если знать высоту дирижабля, то можно вычислить и то, как велика эта разница. Пусть дирижабль летит на высоте 1000 м над земной поверхностью. Угол, составляемый прямыми *AC* и *BD* между собою, равен тому углу, под которым усматривается солнце с земли; угол этот известен: около $^1/_2$°. С другой стороны, известно, что всякий предмет, видимый под углом в $^1/_2$°, удален от глаза на 115 своих поперечников. Значит, избыток длины дирижабля над длиною тени (этот избыток усматривается с земной поверхности под углом в $^1/_2$°) должен составлять 115-ю долю от АС. Величина АС больше отвесного расстояния от А до земной поверхности. Если угол между направлением солнечных лучей и земной поверхностью равен 45°, то АС (при высоте дирижабля 1000 м) составляет около 1400 м, и, следовательно, тень короче дирижабля на 1400 : 115 = 12 м.

Все сказанное относится к полной тени дирижабля — черной и резкой — и не имеет отношения к так называемой полутени, слабой и размытой.

Расчет наш показывает, между прочим, что, будь на месте дирижабля небольшой воздушный шар диаметром меньше 12 м, он не отбрасывал бы вовсе полной тени; видна была бы только его смутная полутень.

9. Задачу решают с конца. Будем исходить из того, что после всех перекладываний число спичек в кучках сделалось одинаковым. Так как от этих перекладываний общее число спичек не изменилось, осталось прежнее (48), то в каждой кучке к концу всех перекладываний оказалось 16 штук.

Итак, имеем в самом конце:

Непосредственно перед этим в 1-ю кучку было прибавлено столько спичек, сколько в ней имелось; иначе говоря, число спичек в ней было удвоено. Значит, до последнего перекладывания в 1-й кучке было не 16, а только 8 спичек. В кучке же 3-й, из которой 8 спичек было взято, имелось перед тем 16 + 8 = 24 спички. Теперь у нас такое распределение спичек по кучкам: 8, 16, 24.

Далее, мы знаем, что перед этим из 2-й кучки было переложено в 3-ю столько спичек, сколько имелось в 3-й кучке. Значит, 24 — это удвоенное число спичек, бывших в 3-й кучке до этого перекладывания. Отсюда узнаем распределение спичек после первого перекладывания:

Легко сообразить, что раньше первого перекладывания (т. е. до того, как из 1-й кучки переложено было во 2-ю столько спичек, сколько в этой 2-й имелось) распределение спичек было таково: 22, 14, 12.

Таковы первоначальные числа спичек в кучках.

10. Эту головоломку также проще решить с конца. Мы знаем, что после третьего удвоения в кошельке оказались 1 руб. 20 коп. (Деньги эти получил старик в последний раз.) Сколько же было до этого удвоения? Конечно, 60 коп. Остались эти 60 коп. после уплаты старику вторых 1 руб. 20 коп., а до уплаты было в кошельке 1 руб. 20 коп. + 60 коп. = 1 руб. 80 коп.

Далее: 1 руб. 80 коп. оказались в кошельке после второго удвоения; до того было всего 90 коп., оставшиеся после уплаты старику первых 1 руб. 20 коп. Отсюда узнаем, что до уплаты находились в кошельке 90 коп. + 1 руб. 20 коп. = 2 руб. 10 коп. Столько денег имелось в кошельке после первого удвоения; раньше же было вдвое меньше — 1 руб. 5 коп. Это и есть те деньги, с которыми крестьянин приступил к своим неудачным финансовым операциям.

Проверим ответ:

Деньги в кошельке

После 1-го удвоения 1 руб. 5 коп. × 2 = 2 руб. 10 коп.
1-й уплаты... 2 руб. 10 коп. – 1 руб. 20 коп. = 90 коп.
2-го удвоения... 90 коп. × 2 = 1 руб. 80 коп.
2-й уплаты... 1 руб. 80 коп. – 1 руб. 20 коп. = 60 коп.
3-го удвоения... 60 коп. × 2 = 1 руб. 20 коп.
3-й уплаты... 1 руб. 20 коп. – 1 руб. 20 коп. = 0.

11. Наш календарь ведет свое начало от календаря древних римлян. Римляне же (до Юлия Цезаря) считали началом года не 1 января, а 1 марта. Декабрь тогда был, следовательно, десятый месяц. С перенесением начала года на 1 января названия месяцев изменены не были. Отсюда и произошло то несоответствие между названием и порядковым номером, которое существует теперь для ряда месяцев.

12. Проследим за тем, что проделано было с задуманным числом. Прежде всего к нему приписали взятое трехзначное число еще раз. Это то же самое, что приписать три нуля и прибавить затем первоначальное число; например:

$$872\,872 = 872\,000 + 872.$$

Теперь ясно, что, собственно, проделано было с числом: его увеличили в 1000 раз и, кроме того, прибавили его само; короче сказать — умножили число на 1001.

Что же сделано было потом с этим произведением? Его разделили последовательно на 7, на 11 и на 13. В конечном счете, значит, разделили его на 7 × 11 × 13, т. е. на 1001.

Итак, задуманное число сначала умножили на 1001, потом разделили на 1001. Надо ли удивляться, что в результате получилось то же самое число?

Прежде чем закончить главу о головоломках в доме отдыха, расскажу еще о трех арифметических фокусах, которыми вы можете занять досуг ваших товарищей. Два состоят в отгадывании чисел, третий — в отгадывании владельцев вещей.

Это старые, быть может, даже и известные вам фокусы, но едва ли все знают, на чем они основаны. А без знания теоретической основы фокуса нельзя сознательно и уверенно его выполнять. Обоснование первых двух фокусов потребует от нас весьма скромной и ничуть не утомительной экскурсии в область начальной алгебры.

13. ЗАЧЕРКНУТАЯ ЦИФРА

Пусть товарищ ваш задумает какое-нибудь многозначное число, например 847. Предложите ему найти сумму цифр этого числа (8 + 4 + 7 = 19) и отнять ее от задуманного числа. У загадчика окажется

$$847 - 19 = 828.$$

В том числе, которое получится, пусть он зачеркнет одну цифру — безразлично какую — и сообщит вам все остальные. Вы немедленно называете ему зачеркнутую цифру, хотя не знаете задуманного числа и не видели, что с ним проделывалось.

Как можете вы это выполнить и в чем разгадка фокуса? Выполняется это очень просто: подыскивается такая цифра, которая вместе с суммою вам сообщенных цифр составила бы ближайшее число, делящееся на 9 без остатка. Если, например, в числе 828 была зачеркнута первая цифра (8) и вам сообщены цифры 2 и 8, то, сложив 2 + 8, вы соображаете, что до ближайшего числа, делящегося на 9, т. е. до 18, не хватает 8. Это и есть зачеркнутая цифра.

Почему так получается? Потому что если от какого-либо числа отнять *сумму* его цифр, то должно остаться число, делящееся на 9, — иначе говоря, такое, *сумма* цифр которого делится на 9. В самом деле, пусть в задуманном числе цифра сотен — a, цифра десятков — b и цифра единиц — c. Значит, всего в этом числе содержится единиц

$$100a + 10b + c.$$

Отнимаем от этого числа *сумму* его цифр $a + b + c$.

Получим

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Но $9(11a + b)$, конечно, делится на 9; значит, при вычитании из числа суммы его цифр всегда должно получиться число, делящееся на 9 без остатка.

При выполнении фокуса может случиться, что сумма сообщенных вам цифр сама делится на 9 (например, 4 и 5). Это показывает, что зачеркнутая цифра есть либо 0, либо 9. Так вы и должны ответить: «0 или 9».

Вот видоизменение того же фокуса: вместо того чтобы из задуманного числа вычитать сумму его цифр, можно вычесть число, полученное из данного какой-либо перестановкой его цифр. Например, из числа 8247 можно вычесть 2748 (если получается число большее задуманного, то вычитают меньшее из большего). Дальше поступают, как раньше сказано:

$$8247 - 2748 = 5499;$$

если зачеркнута цифра 4, то, зная цифры 5, 9, 9, вы соображаете, что ближайшее к $5 + 9 + 9$, т. е. 23, число, делящееся на 9, есть 27. Значит, зачеркнутая цифра $27 - 23 = 4$.

13А. ОТГАДАТЬ ЧИСЛО, НИЧЕГО НЕ СПРАШИВАЯ

Вы предлагаете товарищу задумать трехзначное число, не оканчивающееся нулем, такое, в котором крайние цифры разнятся больше чем на 1, и просите затем переставить цифры в обратном порядке. Сделав это, он должен вычесть меньшее число из большего и полученную разность сложить с нею же, но написанною в обратной последовательности цифр. Ничего не спрашивая у загадчика, вы сообщаете ему число, которое у него получилось в конечном счете.

Если, например, было задумано 467, то загадчик должен выполнять следующие действия:

$$467; \qquad 764; \qquad \begin{array}{r} -\,764 \\ 467 \\ \hline 297 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\,297 \\ 792 \\ \hline 1089 \end{array}.$$

Этот окончательный результат — 1089 — вы и объявляете загадчику. Как вы можете его узнать?

Рассмотрим задачу в общем виде. Возьмем число с цифрами a, b, c. Оно изобразится так:

$$100a + 10b + c.$$

Число с обратным расположением имеет вид:

$$100c + 10b + a.$$

Разность между первым и вторым равна:

$$99a - 99c.$$

Делаем следующие преобразования:

$$99a - 99c = 99\ (a - c) = 100\{a - c) - a + c =$$
$$= 100(a - c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a\ c =$$
$$= 100\ (a - c - 1) + 90 + (10 - a + c).$$

Значит, разность состоит из следующих трех цифр:

цифра сотен: $a - c - 1$,
десятков: 9,
единиц: $10 + c - a$.

Число с обратным расположением цифр изображается так:

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1).$$

Сложив оба выражения

$$100(a - c - 1) + 90 + 10 + c - a\ 100(10 + c - a) + 90 + a - c - 1,$$

получаем

$$100 \times 9 + 180 + 9 = 1089.$$

Каковы бы ни были цифры *a, b, c*, в итоге выкладок всегда получается одно и то же число: 1089. Нетрудно поэтому отгадать результат этих вычислений: вы знали его заранее. Понятно, что показывать этот фокус одному лицу дважды нельзя — секрет будет раскрыт.

14. КТО ЧТО ВЗЯЛ?

Для выполнения этого остроумного фокуса необходимо подготовить три какие-нибудь мелкие вещицы, удобно помещающиеся в кармане, например карандаш, ключ и перочинный ножик. Кроме того, поставьте на стол тарелку с 24 орехами; за неимением орехов годятся шашки, кости домино, спички и т. п.

Троим товарищам вы предлагаете во время вашего отсутствия в комнате спрятать в карман карандаш, ключ или ножик, кто какую вещь хочет. Вы беретесь отгадать, в чьем кармане какая вещь.

Процедура отгадывания проводится так. Возвратившись в комнату после того, как вещи спрятаны в карманах товарищей, вы начинаете с того, что вручаете им на сохранение орехи из тарелки.

Первому даете один орех, второму — два, третьему — три. Затем снова удаляетесь из комнаты, оставив товарищам следующую инструкцию. Каждый должен взять себе из тарелки еще орехов, а именно: обладатель карандаша берет столько орехов, сколько ему было вручено; обладатель ключа берет вдвое больше того числа орехов, какое ему было вручено; обладатель ножа берет вчетверо больше того числа орехов, какое ему было вручено.

Прочие орехи остаются на тарелке.

Когда все это проделано и вам дан сигнал возвратиться, вы, входя в комнату, бросаете взгляд на тарелку и объявляете, у кого в кармане какая вещь.

Фокус тем более озадачивает, что выполняется без участия тайного сообщника, подающего вам незаметные сигналы. В нем нет никакого обмана: он целиком основан на арифметическом расчете. Вы разыскиваете обладателя каждой вещи единственно лишь по числу оставшихся орехов. Остается их на тарелке немного — от 1 до 7, и счесть их можно одним взглядом.

Как же, однако, узнать по остатку орехов, кто взял какую вещь?

Очень просто: каждому случаю распределения вещей между товарищами отвечает иное число остающихся орехов. Мы сейчас в этом убедимся.

Пусть имена ваших товарищей Владимир, Георгий, Константин; обозначим их начальными буквами: В, Г, К. Вещи также обозначим буквами: карандаш — а, ключ — b, нож — c. Как могут три вещи распределиться между тремя обладателями? На 6 ладов:

В	*Г*	*К*
a	*b*	*c*
a	*c*	*b*
b	*a*	*c*
b	*c*	*a*
c	*a*	*b*
c	*b*	*a*

Других случаев, очевидно, быть не может; наша табличка систематически исчерпывает все комбинации.

Посмотрим теперь, какие остатки отвечают каждому из этих 6 случаев:

ВГК	Число взятых орехов	Итого	Остаток
abc	1 + 1 = 2; 2 + 4 = 6; 3 + 12 = 15	23	1
acb	1 + 1 = 2; 2 + 8 =10; 3 + 6 = 9	21	3
bac	1 + 2 = 3; 2 + 2 = 4; 3 + 12 = 15	22	2
bca	1 + 2 = 3; 2 + 8 = 10; 3 + 3 = 6	19	5
cab	1 + 4 = 5; 2 + 2 = 4; 3 + 6 = 9	18	6
cba	1 + 4 = 5; 2 + 4 = 6; 3 + 3 = 6	17	7

Вы видите, что остаток орехов всякий раз получается иной. Поэтому, зная остаток, вы легко устанавливаете, каково распределение вещей между вашими товарищами. Вы снова — в третий раз — удаляетесь из комнаты и заглядываете там в свою записную книжку, где записана сейчас воспроизведенная табличка (собственно, нужны вам только первая и последняя графы); запомнить ее наизусть трудно, да и нет надобности. Табличка скажет вам, в чьем кармане какая вещь. Если, например, на тарелке осталось 5 орехов, то это означает (случай *b, c, a*), что

ключ — у Владимира;
нож — у Георгия;
карандаш — у Константина.

Чтобы фокус удался, вы должны твердо помнить, сколько орехов вы дали каждому товарищу (раздавайте орехи поэтому всегда по алфавиту, как и было сделано в нашем случае).

ГЛАВА ВТОРАЯ

—

МАТЕМАТИКА В ИГРАХ

15. ЦЕПЬ ИЗ 28 КОСТЕЙ

Почему 28 костей домино можно выложить с соблюдением правил игры в одну непрерывную цепь?

16. НАЧАЛО И КОНЕЦ ЦЕПИ

Когда 28 костей домино выложены в цепь, на одном ее конце оказалось 5 очков.

Сколько очков на другом конце?

17. ФОКУС С ДОМИНО

Ваш товарищ берет одну из костей домино и предлагает вам из остальных 27 составить непрерывную цепь, утверждая, что это всегда возможно, какая бы кость ни была взята. Сам же он удаляется в соседнюю комнату, чтобы не видеть вашей цепи.

Вы приступаете к работе и убеждаетесь, что товарищ ваш прав: 27 костей выложились в одну цепь. Еще удивительнее то, что товарищ, оставаясь в соседней комнате и не видя вашей цепи, объявляет оттуда, какие числа очков на ее концах.

Как может он это знать? И почему он уверен, что из всяких 27 костей домино составится непрерывная цепь?

18. РАМКА

Рисунок изображает квадратную рамку, выложенную из костей домино с соблюдением правил игры. Стороны рамки равны по длине, но не одинаковы по сумме очков: верхний и левый ряды заключают по 44 очка, остальные же два ряда — 59 и 32.

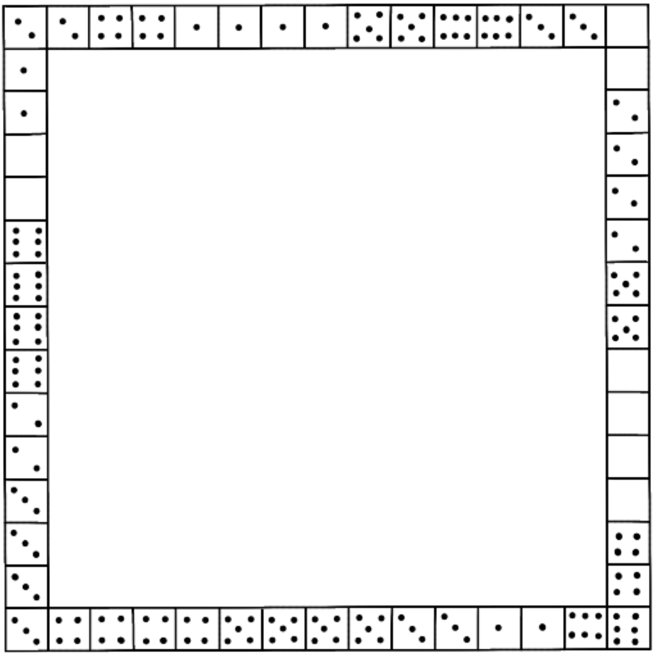

Рис. Решение 19

Можете ли вы выложить такую квадратную рамку, все стороны которой заключали бы одинаковую сумму очков — именно 44?

19. СЕМЬ КВАДРАТОВ

Четыре кости домино можно выбрать так, чтобы из них составился квадратик с равной суммой очков на каждой стороне. Образчик вы видите на рисунке: сложив очки на каждой стороне квадратика, во всех случаях получите 11.

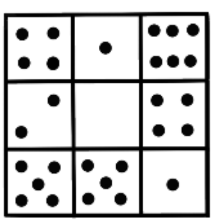

Рис. Семь квадратов (нижний рисунок)